ゴールデンウィーク課題

高2 数学Ⅱ

★二項定理について

二項定理

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots$$

$$+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n$$

・組み合わせや指数がややこしいので、間違えないように注意しよう
・数字が1ずつ増えていくところ、1ずつ減っていくところ、変わらないところをうまく対応させよう

${}_nC_0=1$, ${}_nC_n=1$, ${}_nC_1=n$ に注意.

例題1 次の式を展開せよ

(1) $(a+b)^6$

$={}_6C_0a^6b^0+{}_6C_1a^5b^1+{}_6C_2a^4b^2+{}_6C_3a^3b^3+{}_6C_4a^2b^4+{}_6C_5a^1b^5+{}_6C_6a^0b^6$

$=a^6+6a^5b+\frac{6\cdot5}{2\cdot1}a^4b^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}a^3b^3+{}_6C_2a^2b^4+{}_6C_1ab^5+b^6$

$({}_6C_4={}_6C_2,\ {}_6C_5={}_6C_1)$

$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

数字の計算忘れに注意.

(1) $(2x+3)^5$

$={}_5C_0(2x)^5\cdot3^0+{}_5C_1\cdot(2x)^4\cdot3^1+{}_5C_2(2x)^3\cdot3^2+{}_5C_3\cdot(2x)^2\cdot3^3+{}_5C_4(2x)^1\cdot3^4+{}_5C_5(2x)^0\cdot3^5$

$=32x^5+5\times16x^4\times3+\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times8x^3\times9+{}_5C_2\times4x^2\times27+{}_5C_1\times2x\times81+243$

$=32x^5+240x^4+720x^3+1080x^2+810x+243$

例題2 二項定理を利用して、次の式が成り立つことを証明せよ。

$${}_nC_0+2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+\cdots+2^n{}_nC_n=3^n$$

(左辺が2^nで右辺が3^nなので、1^nがかくれている、と推測する。)

(左辺) $={}_nC_0+{}_nC_1\cdot2^1+{}_nC_2 2^2+\cdots+{}_nC_n\cdot2^n$

$={}_nC_0\cdot1^n\cdot2^0+{}_nC_1\cdot1^{n-1}\cdot2^1+{}_nC_2\cdot1^{n-2}\cdot2^2+\cdots+{}_nC_n\cdot1^0\cdot2^n$

$=(1+2)^n$ 　1 かくれている1を補う。1^0はすべて1.

$=3^n$

したがって、与式は成り立つ。

項が3つある場合の展開式

$(a+b+c)^n$ の展開式における一般項の式は

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r \quad \text{ただし} \quad p+q+r=n$$

例題3 $(x-2y+3z)^5$ の展開式における x^2yz^2 の項の係数を求めよ。

$x^2y^1z^2$ なので、$p=2,\ q=1,\ r=2$

したがって、x^2yz^2の項は、

$\frac{5!}{2!1!2!}x^2\cdot(-2y)\cdot(3z)^2$

$=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot1\cdot2\cdot1}x^2\cdot(-2y)\cdot(9z^2)$

$=30\cdot(-2)\cdot9\cdot x^2yz^2$

$=-540x^2yz^2$

よって、x^2yz^2の項の係数は、-540